7.4.2 Parametrické vyjádření přímky II

Předpoklady: 7401

Pedagogická poznámka: Hodinu je možné pojmout různými způsoby. Já se snažím, aby závěr (příklad 9) zůstalo více než 10 minut. Studenti těžkou budou schopni vymyslet více důvodů pro zamítnutí obecné rovnice přímky, nemá cenu dlouho čekat. Řešení příkladu víceméně odpřednáším. Snažím se studentům vysvětlit, že opravdová matematika je právě podobné vědomí souvislostí.

Př. 1: Urči vzájemnou polohu přímek $p=\{[2+t;3-2t;-1+t],t\in R\}$, $q=\{[-2+3s;3+2s;3+s],s\in R\}$.

Směrové vektory obou přímek: $\boldsymbol{u}_p=(1;-2;1)$, $\boldsymbol{u}_q=(3;2;1)$ $\Rightarrow$ ihned vidíme, že $\boldsymbol{u}_q\neq k\cdot\boldsymbol{u}_p$ $\Rightarrow$ přímky jsou různoběžné nebo mimoběžné $\Rightarrow$ hledáme průsečíky $\Rightarrow$ soustava rovnic:

$$2+t=-2+3s$$
$$3-2t=3+2s$$
$$-1+t=3+s$$

Z poslední rovnice vyjádříme $t=4+s$ a dosadíme do zbývajících rovnic:

$$2+(4+s)=-2+3s$$
$$3-2(4+s)=3+2s$$

$$6+s=-2+3s$$
$$3-8-2s=3+2s$$

$$8=2s \Rightarrow s=4$$
$$-8=4s \Rightarrow s=-2$$

$\Rightarrow$ z obou rovnic vyšla jiná hodnota s $\Rightarrow$ přímky nemají průsečík $\Rightarrow$ přímky p a q jsou mimoběžné.

Pedagogická poznámka: Jak už je poznamenáno v minulé hodině, studenti mají často tendenci dosadit za neznámou pouze do jedné ze zbývajících rovnic. Pokud poslední rovnici ignorují, naleznou samozřejmě řešení soustavy a získají tak pocit, že přímky *p*, *q* jsou různoběžné.

Př. 2: Urči vzájemnou polohu přímek $p=\{[-3+4t;4-2t;2+2t],t\in R\}$ a *AB*, kde $A[1;2;4]$, $B[-5;5;1]$.

Porovnáme směrové vektory: $\boldsymbol{u}_p=(4;-2;2)$, $\boldsymbol{u}_{AB}=B-A=(-6;3;-3)$

$\frac{-6}{4}=\frac{3}{-2}=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}=k$ $\Rightarrow$ platí: $\boldsymbol{u}_{AB}=k\cdot\boldsymbol{u}_p$ $\Rightarrow$ přímky jsou rovnoběžné nebo totožné.

Zjišťujeme zda bod *A* (nebo *B*) leží na přímce *p*:

$$-3+4t=1\Rightarrow t=1$$
$$4-2t=2\Rightarrow t=1$$
$$2+2t=4\Rightarrow t=1$$

$\Rightarrow$ přímka *AB* je totožná s přímkou *p*.

Pedagogická poznámka: Studenti mají často tendenci počítat průsečíky obou přímek. Je to samozřejmě možné (mělo by vyjít nekonečně mnoho společných bodů), ale v naší situaci zbytečně dlouhé.

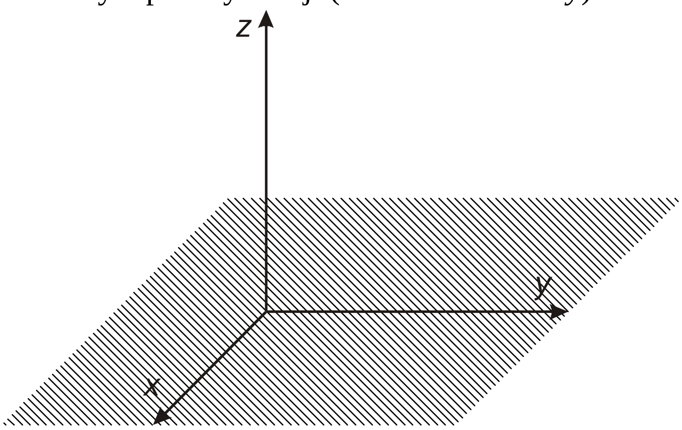
Př. 3: Najdi parametrické vyjádření osy *z*.

Dva body na ose z: $[0;0;1]$, $[0;0;2]$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{u} = (0;0;1)$, bod $O[0;0;0]$

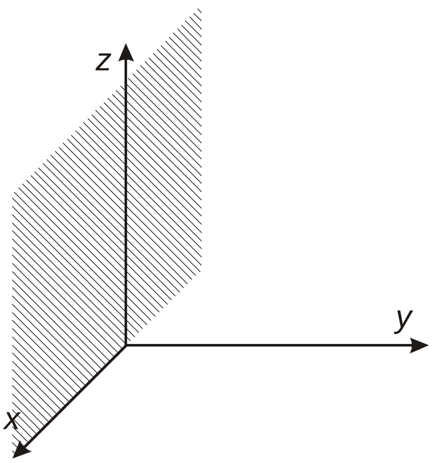
$$\Rightarrow \text{ osa z: } \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= t \end{aligned}$$

Př. 4: Jakou množinu tvoří body, které vyhovují podmínce $z = 0$?

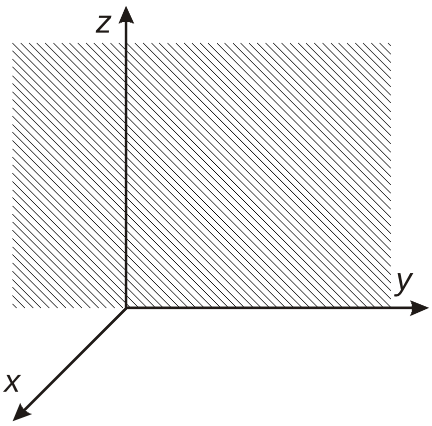
Podmínce $z = 0$ vyhovují body na ose *x*, body na ose *y* i všechny ostatní body v rovině, kterou tyto přímky určují (souřadná rovina *xy*).



Př. 5: Najdi vyjádření souřadných rovin *xz* a *yz* analogická rovnici $z = 0$ pro souřadnou rovinu *xy*.



Souřadná rovina *xz* obsahuje osy *x* a *z*. Všechny body těchto os i ostatní body souřadné roviny *xz* splňují podmínku $y = 0$.



Souřadná rovina *yz* obsahuje osy *y* a *z*. Všechny body těchto os i ostatní body souřadné roviny *yz* splňují podmínku $x = 0$.

Vrátíme se k parametrickému vyjádření osy *z*. Trojici rovnic můžeme také vnímat takto:

- $z = t$: *z*-vá souřadnice hledaných bodů je libovolná,
- $x = 0$, $y = 0$: hledané body leží na průsečnici souřadných rovin *xz* a *yz*.

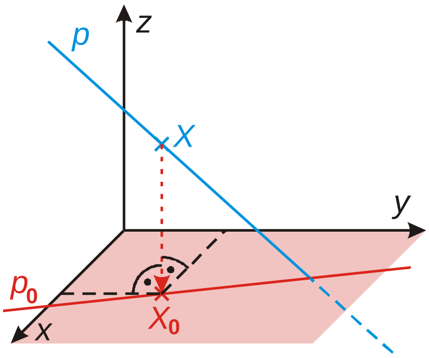
$\Rightarrow$ Osu *z* není možné vyjádři jedinou rovnicí typu $z = 0$. Body na ose *z* splňují takové podmínky dvě: $x = 0$ a $y = 0$.

Př. 6: Urči průsečík přímky $p = \{[-3+4t; 4-2t; 2+2t], t \in R\}$ se souřadnou rovinou *xy*.

Všechny body v souřadné rovině *xy* splňují podmínku (rovnici) $z = 0$ $\Rightarrow$ musí tedy platit:
$z = 2+2t = 0 \Rightarrow t = -1$.
Dosadíme do rovnic pro zbývající souřadnice:
$x = -3+4t = -3+4(-1) = -7$ $\quad$ $y = 4-2t = 4-2(-1) = 6$ $\quad$ $z = 0$
Přímka *p* se se souřadnou rovinou *xy* protíná v bodě $P[-7;6;0]$.

Př. 7: Je dána přímka $p = \{[-3+4t; 4-2t; 2+2t], t \in R\}$. Najdi parametrické vyjádření jejího kolmého průmětu do roviny *xy*.

Nakreslíme si obrázek:



Bod *X* a jeho kolmý průmět X_0 mají téměř stejné souřadnice, liší se pouze u *z*-ové souřadnice, kterou má bod X_0 nulovou (leží v souřadné rovině *xy*) $\Rightarrow$ přímka p_0 má podobné parametrické vyjádření jako přímka *p*. Liší pouze v nulové *z*-ové souřadnici.
$p = \{[-3+4t; 4-2t; 0], t \in R\}$

Př. 8: Najdi co nejvíce důvodů, proč rovnice $ax + by + cz + d = 0$ není v prostoru obecnou rovnicí přímky.

- Vektory kolmé na libovolný vektor netvoří v prostoru přímku, ale celou rovinu. Mohou směřovat do nekonečně mnoha různých směrů, ne jen do jednoho jako v rovině.
- Na přímku existuje v prostoru nekonečně mnoho různých kolmých směrů, ne jeden jako v rovině, nelze tedy najít k přímce v prostoru normálový směr.
- Rovnice $ax + by + cz + d = 0$ tvoří soustavu jedné rovnice o třech neznámých. Její řešení bude tvořit množina se dvěma stupni volnosti (budeme volit dvě neznámé). Takovou množinou však není přímka (ta má jediný stupeň volnosti), ale rovina.
- Speciálním případem rovnice $ax + by + cz + d = 0$ je rovnice $z = 0$. Tato rovnice však neurčuje přímku, ale celou souřadnou rovinu.

- Na vyjádření osy z jsme potřebovali dvě rovnice diskutovaného typu $x = 0$ a $y = 0$. To napovídá, že jsme osu z získali jako průsečík dvou rovin.
- Zkusíme se zbavit parametru v parametrickém vyjádření přímky $\begin{aligned} x &= 2+t \\ y &= 3-2t \\ z &= 1+3t, t \in R \end{aligned}$.

  Z první rovnice vyjádříme parametr t: $t = x-2$.

  Dosadíme do zbývajících dvou rovnic:

  $y = 3-2(x-2) = 3-2x+4 \Rightarrow 2x+y-7=0$

  $z = 1+3(x-2) = 1+3x-6 \Rightarrow 3x-z-5=0$

  $\Rightarrow$ získali jsme dvě rovnice $\begin{matrix} 2x+y-7=0 \\ 3x-z-5=0 \end{matrix}$. Podobně jako u vyjádření osy z jde zřejmě o vyjádření přímky jako průsečíku dvou rovin.

Neexistuje obecná rovnice přímky v prostoru.

Př. 9: Petáková:
strana 114/cvičení 9
strana 114/cvičení 11 b) c) e)
strana 115/cvičení 13

Shrnutí: Obecná rovnice přímky v prostoru neexistuje.